

مثال ۳.۱.۱۱. حل معادله ی

$$(y + z)p + (x + z)q = x + y$$

حل. طبق معادله ی کمکی لاگرانژ^۳ می نویسیم

$$\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{x + z} = \frac{dz}{x + y}$$

با تفصیل نسبت ها در صورت و مخرج داریم

$$\frac{dx - dy}{y - x} = \frac{dy - dz}{z - y}$$

یا

$$\frac{d(x - y)}{x - y} = \frac{d(y - z)}{y - z}$$

که با انتگرالگیری به $\ln(x - y) = \ln(y - z) + C_1$ می رسم و در نتیجه

$$\frac{x - y}{y - z} = C'_1$$

از طرفی با مجموع نسبت ها داریم

$$\frac{dy - dz}{z - y} = \frac{dx + dy + dz}{2x + 2y + 2z}$$

که با انتگرالگیری فرمول $-\ln(y - z) = \frac{1}{2} \ln(x + y + z) + C_2$ را بدست می دهد و بنابراین

$$(y - z)^2(x + y + z) = C'_2$$

با لحاظ جواب نهائی معادله دیفرانسیل به صورت $\varphi(u, v) = 0$ جواب نهائی

$$\varphi\left(\frac{x - y}{y - z}, (y - z)^2(x + y + z)\right) = 0$$

حاصل می شود.

^۳ Lagrange's Auxiliary Equation